

# 球状物体の平方充填モデルを適用した 自動四角メッシュ生成

AUTOMATED QUADRILATERAL MESH GENERATION VIA BUBBLE PACKING APPROACHES

伊藤 貴之<sup>1)</sup> 井上 恵介<sup>1)</sup> 山田 敦<sup>1)</sup> 嶋田 憲司<sup>2)</sup> 古畑 智武<sup>3)</sup>  
Takayuki ITOH Keisuke INOUE Atsushi YAMADA Kenji SHIMADA Tomotake FURUHATA

- 1) 日本アイ・ピー・エム(株) 東京基礎研究所
- 2) カーネギーメロン大学 機械工学科
- 3) 日本アイ・ピー・エム(株) APソリューション開発

We propose a quadrilateral mesh generation method, which squarely packs many spherical objects inside a given region, and connects the center points of them to form quadrilateral elements. This method controls the directionality of elements by giving a vector field wrapping the region. In this paper we also shows meshes generated by the method with various vector fields.

**Key Words:** *Quadrilateral mesh, squarely-packing, directionality.*

## 1. はじめに

筆者らは以前より、質量や引力・斥力をもつ球状物体を物理モデルに従って与えられた領域内部に充填し、その中心点を結んで三角メッシュを生成する手法(バブル・メッシュ法)[1]について研究を進めている。また、三角メッシュを構成する三角形要素をペアにして四角形要素に変換する自動四角メッシュ生成手法も提案している[2]。この2手法を用いた四角メッシュ生成には、複雑な領域においても領域分割などの手動操作を用いずにメッシュを生成することができ、またバブル・メッシュ法によって自在に制御されたメッシュ密度分布を保持した四角メッシュを生成できる、などの特徴がある。

一方、筆者らは、以下の要件をすべて満たす自動四角メッシュ生成手法の確立を目指している。

- 領域分割などの手動処理を必要とせず、形状と要素辺の長さを入力するだけで、自動的に四角メッシュが生成される。
- 要素辺の長さの分布を制御して、重要な部分だけに適応的に細かいメッシュ要素を生成する。
- 複雑な曲面形状を対象とできること。
- 生成される四角形要素の歪みが少ない。
- 生成される四角形要素の整列方向が制御できる。

文献 [3] に示す通り、従来の自動四角メッシュ生成手法で以上の要件をすべて満たすものは、ほとんど見当たらない。筆者ら自身の従来の手法 [1][2] は、前半の3要件を満たしていると考えられるが、後半の2要件に関しては不十分である。筆者らが提案しているバブル・メッシュ法 [1] は、球状物体を六方最密に充填することで、正三角形に近い良質な三角メッシュを生成する手法である。バブル・メッシュ法で生成された正三角形に近い三角形要素をペアにして四角形要素に変換すると、正方形というよりも平行四辺形や菱形に近い歪んだ四角形要素が生成されやすい上に、位相的な不規則度が大きくなりがちである。また、バブル・メッシュ法では、要素の整列方向の制御については考慮が不十分である。

筆者らは、この問題点を解決するために、球状物体を平方充填し、この中心点を連結して四角メッシュを自動生成する、平方充填バブル・メッシュ法を提案している[3]。この手法では、球状物体が六方充填ではなく平方充填されているため、正方形に近い良質な四角形要素を生成することが容易である。また、与えられた形状を覆うベクトル場を定義し、そのベクトル場に沿うように球状物体を整列させながら球状物体を充填するので、ベクトル場の操作によって要素の整列方向を自在に制御することが可能である。本報告では、まずこの手法の概要を紹介するとともに、そのベクトル場の操作によってさまざまな四角メッシュが生成されることを、いくつかの実行例を用いて実証する。

## 2. バブル・メッシュ法

バブル・メッシュ法では、以下の手順に従って、球状物体を与えられた形状に最密充填し、三角メッシュを生成する (図 1 参照)。

1. 形状の頂点上および辺上に、多数の球状物体を発生し、力学シミュレーションと個数制御によって辺上の球状物体を最密な状態にする。
2. 形状の面内部に、多数の球状物体を発生し、力学シミュレーションと個数制御によって面内部の球状物体を最密な状態にする。
3. Delaunay 三角メッシュ生成法などを用いて、球状物体の中心点を連結して三角メッシュを生成する。

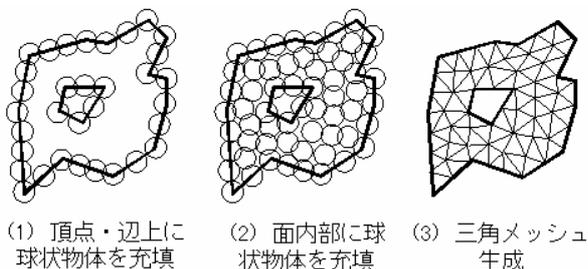


図 1 バブル・メッシュ法の処理工程

ここで、それぞれの球状物体には、半径、質量、引力 (または斥力) が仮想されている。球状物体の半径を分布関数  $d(x)$  で表すと、中心点の位置が  $x_1, x_2$  である 2 個の球状物体の安定距離  $r_0$  は、

$$r_0 = d(x_1) + d(x_2)$$

で示される。バブル・メッシュ法では、球状物体間の引力  $f$  を、以下の条件を満たす関数で定義する。

$$f(r_1) = 0, f(r_0) = 0, f'(0) = 0, f'(r_0) = k_0, \\ f(r) = 0 \text{ (if } r < 0 \text{ or } r > r_1 > r_0)$$

この引力を用いた運動方程式を、Runge-Kutta 法などの反復法を用いて解くことにより、入力形状に発生させた球状物体を最密に充填した状態が求められる。ただし、初期段階で発生させた球状物体の個数が必ずしも適切であるとは限らないので、運動方程式を用いた反復処理と平行して、球状物体の追加および削除を適応的に行う。

## 3. 平方充填バブル・メッシュ法

従来のバブル・メッシュ法では、近接する 2 個の球状物体に対して、互いの中心点に向かって引力や斥力を働かせることにより、六方最密となる状態を求めている。この状態は、正三角形に近い良質な三角メッシュを生成するのに適している。

それに対して、平方充填バブル・メッシュ法では、球状物体が六方充填ではなく平方充填された状態を求める。こ

のような状態で球状物体が充填される自然界の代表的なモデルに、以下のようなものがある。

- 金属結合の分子構造。
- NaCl の結晶のような、2 種類の異なる分子で構成される分子構造。

本手法では、金属結合に類似したモデルを用いている。金属結合では、近接した分子が電子を共有すると、分子周辺のポテンシャルに異方性が生じ、そのポテンシャルが極小となる方向 (電子を共有した分子と 90 度の角度をなす方向) に別の分子を引き付ける。この金属結合の過程におけるポテンシャル場と同様に、球状物体の引力の影響範囲を表すポテンシャル場を仮定し、近隣する球状物体に対してポテンシャルが極小となる点の方向に引力を仮定することで、球状物体が平方に整列した状態を得ることが可能である。平方に整列された球状物体の中心点を結ぶことで、正方形に近い良質な四角形要素を生成することができる。

本手法では、簡単な実装で球状物体の平方充填を実現するために、ポテンシャル場そのものを設けるのではなく、ポテンシャルが極小となる 4 点だけをそれぞれの球状物体に設けて、その方向に引力を働かせる。本手法では、4 つのポテンシャル極小点の位置を決めるために、入力形状全体を覆うベクトル場を与える (図 2(1)参照)。半径  $r$ 、中心点  $x$  である球状物体のポテンシャル極小 4 点は、中心点  $x$  に対して、ベクトル場が示す単位ベクトル  $v_A$  の方向、および  $v_A$  に垂直な単位ベクトル  $v_B$  の方向に設定される。4 点の位置  $x_1, x_2, x_3, x_4$  は、以下の式で与えられる。

$$x_1 = x + 2r v_A \quad x_2 = x + 2r v_B \\ x_3 = x - 2r v_A \quad x_4 = x - 2r v_B$$

図 2(2)はベクトル場を与えられた形状内部における球状物体の例であり、球状物体とあわせて示される十字線の端点にポテンシャル極小点が設定されている。本手法では、近隣する球状物体に対して、この 4 点のうち最も距離の小さい点に向かう引力を働かせる (図 2(3)参照)。この引力を用いた運動方程式を、従来のバブル・メッシュ法と同様に反復法を用いて解くことにより、球状物体が平方充填された状態を求める。このとき、球状物体は与えられたベクトル場に沿って整列するので、生成される四角形要素もベクトル場に沿って整列する。逆に言えば、ベクトル場を操作することで、四角メッシュの整列方向を制御することが可能である。

球状物体の中心点を結んでメッシュを生成する過程において、筆者らの実装では、まず Delaunay 三角メッシュ方で三角メッシュを生成し、文献 [2] に類似した方法でそれを四角メッシュに変換する。この実装では、まず正三角形よりも直角二等辺三角形に近い三角形要素が多数生成され、それらをペアにすることで正方形に近い四角形要素が生成される。

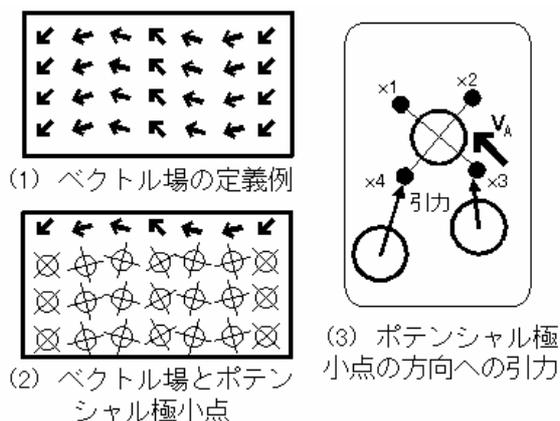


図2 平方充填バブル・メッシュ法の原理

本報告では説明を省略するが、文献 [4][5] に示される手法を併用することにより、曲面上に四角メッシュを生成することや、正方形ではなく長方形に近い形状をもつ異方性四角メッシュを生成することが可能である。

#### 4. さまざまなベクトル場に対する実行例

筆者らは、平方充填バブル・メッシュ法のためのベクトル場の指定方法として、以下の2種類を実装している。

- ユーザーによる任意入力。たとえば、解析結果などから得られる物理量の移動方向をベクトル場にすることで、物理量の移動方向に整列したメッシュが得られる。
- 形状の境界線に沿ったベクトル場の自動生成。形状の境界線に沿って整列したメッシュが得られる。

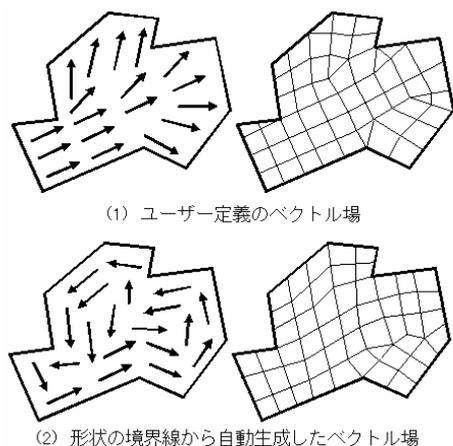


図3 平方充填バブル・メッシュ法のためのベクトル場

ここで、本手法を実装して、上記の2種類のベクトル場を用いてメッシュを生成した結果を示す。なお、本手法はRS/6000 Model 42T (AIX 4.1.4) 上で実装された。なお、本章で示す四角メッシュ生成結果は、いずれも三角形要素を含んでいる。これを四角形要素のみで構成される四角メ

ッシュに変換するには、文献 [2] が示すテンプレートを用いて、要素辺の長さが半分である四角形要素に変換すればよい。

図4は、入力形状に単一方向のベクトル場を与えた例であり、図8はそのベクトル場を用いて四角メッシュを生成した例である。四角形要素の多くがベクトル場にそって整列している。この性質は、ベクトル場が単一方向でなくとも同様に見られる。

図5は、図4,8に用いた形状に対して、境界線にそったベクトル場を自動生成した例であり、図9はそのベクトル場を用いて四角メッシュを生成した例である。四角形要素の多くが境界線にそって整列している。この性質は、境界付近の数値を重視するような解析において特に有用であると思われる。

図6は、境界上の要素辺の長さが可変である形状に対して、境界線にそったベクトル場を自動生成した例であり、図10はそれを用いて要素辺の長さが適応的に変化する四角メッシュを生成した例である。図7は、境界上の要素辺の長さが可変であり、かつ形状内部に穴や固定線分をもつ形状に対して、境界線にそったベクトル場を自動生成した例であり、図11はそれを用いて要素辺の長さが適応的に変化する四角メッシュを生成した例である。このように、本手法は適応的なメッシュ生成においても有用であることがわかる。

今後の課題として、四角メッシュ中に残存する三角形要素を減らすことを考えている。具体的には、ベクトル場の自動生成処理や、三角形要素から四角形要素への変換処理を改良している途中である。

#### 参考文献

- [1] Shimada K., Physically-Based Mesh Generation: Automated Triangulation of Surfaces and Volumes via Bubble Packing, Dissertation of Massachusetts Institute of Technology, 1993.
- [2] Shimada K., and Itoh T., Automated Conversion of 2D Triangular Mesh into Quadrilateral Mesh, International Conference on Computational Engineering Science '95 Proceedings, pp.350-355, 1995.
- [3] 伊藤, 山田, 井上, 嶋田, 古畑, 平方充填バブル・メッシュ法を用いた自動四角メッシュ生成, 情報処理学会グラフィクスとCAD研究報告, 97-CG-87, pp. 7-12, 1997.
- [4] 山田, 嶋田, 井上, 伊藤, 古畑, パラメータ空間への楕円最密充填による自動曲面メッシング手法, 情報処理学会 Visual Computing / グラフィクスとCAD 合同シンポジウム'97, pp.1-8, 1997.
- [5] 嶋田, 非等方性メッシュの自動生成方法, 情報処理学会第51回全国大会, 4C-7, 1995.

図4 入力形状とベクトル場 (1)

図8 メッシュ生成結果 (1)

図5 入力形状とベクトル場 (2)

図9 メッシュ生成結果 (2)

図6 入力形状とベクトル場 (3)

図10 メッシュ生成結果 (3)

図7 入力形状とベクトル場 (4)

図11 メッシュ生成結果 (4)